

# Zur Theorie der Neutronensterne

P. GOMBÁS und D. KISDI

Physikalisches Institut der Universität für Technische Wissenschaften, Budapest, und  
Forschungsgruppe für Theoretische Physik der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest

(Z. Naturforsch. 21 a, 2009—2012 [1966]; eingegangen am 23. Februar 1966)

Using a semi-empirical theory of interaction between neutrons in atomic nuclei, the average energy of a neutron, the equation of state, and the pressure-compressibility relation is computed for a neutron gas of very high density ( $n \approx 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ). The results are applied to the computation of the mass and the radius of a neutron star as a function of the central density. For the critical mass, above which a neutron star cannot exist, a value of 0.96 solar masses is found.

Das Problem des Verhaltens der Materie, insbesondere eines Neutronengases bei sehr hohen Dichten, spielt bei gewissen astrophysikalischen Problemen, besonders bei der Berechnung der Struktur von Neutronensternen, eine wichtige Rolle. Eine exakte Berechnung dieses Verhaltens ist zur Zeit wegen der Kompliziertheit des Problems unmöglich. Die Schwierigkeiten werden einerseits durch die zwischen den Nukleonen wirkenden Kräfte verursacht, die bisher formelmäßig exakt nicht dargestellt werden konnten, und andererseits dadurch, daß die zwischen den Nukleonen bestehende Korrelation nicht genügend genau in Betracht gezogen werden kann. Bisher sind über die Eigenschaften der Materie bei sehr hohen Dichten mehrere interessante Beiträge<sup>1</sup> erschienen, die die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen überhaupt nicht, oder aber nur in einer sehr groben Näherung erfassen. Einer dieser Beiträge, und zwar eine Arbeit von SZAMOSI und GRATTON<sup>2</sup> legt das von GOMBÁS<sup>3</sup> entwickelte statistische Kernmodell zugrunde, in welchem zwischen den Nukleonen eine halbempirische Wechselwirkung vorausgesetzt wurde, die die Energie der Kerne sowie die Sättigung der Kernkräfte und Dichte richtig wiedergibt. Dieses statistische Kernmodell wurde von GOMBÁS für verschiedene Formen des ortsabhängigen Anteils der Nukleonenwechselwirkung, und zwar für eine YUKAWASche, eine reine exponentielle und eine GAUSSsche Form entwickelt. GRATTON und SZAMOSI wählen die YUKAWASche Form, die jedoch für Kerne zu einer unbefriedigenden DichteVerteilung der Nukleonen führt. Wir wollen

hier die GAUSSsche Form für den ortsabhängigen Anteil der Nukleonenwechselwirkung zugrunde legen, für die sich aus dem statistischen Kernmodell nicht nur die Kernenergien, sondern auch die Dichteverteilungen der Nukleonen in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung ergeben<sup>4</sup>.

Wir befassen uns hier mit einem reinen Neutronengas und berechnen zunächst die mittlere Energie eines Neutrons, die Druck-Dichte-, sowie die Kompressibilität-Dichte-Beziehung des Neutronengases; im Anschluß hieran behandeln wir einen Neutronen-Stern und berechnen die Sternmasse als Funktion der zentralen Dichte, sowie den Sternradius als Funktion der Sternmasse.

## Neutronengas

Zwischen der Neutronendichte  $\varrho$  und dem maximalen Impulsbetrag  $p_\mu$  der Neutronen besteht der bekannte Zusammenhang

$$p_\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} h \varrho^{1/3}, \quad (1)$$

wo  $h$  die PLANCKsche Konstante bezeichnet. Für die mittlere kinetische Energie eines Neutrons hat man

$$u_k = \frac{3}{5} \frac{p_\mu^2}{2 M}; \quad (2)$$

$M$  bedeutet die Neutronenmasse.

Die effektive Wechselwirkungsenergie  $V$  zweier Neutronen in der Neutronenmaterie setzen wir, gemäß des eingangs Gesagten, in der Form

$$V = \frac{1}{3} J(r) (1 - 2 P_o) \quad (3)$$

<sup>2</sup> G. SZAMOSI u. L. GRATTON, Nuovo Cim. 33, 1056 [1964].

<sup>3</sup> P. GOMBÁS, Acta Phys. Hung. 1, 329 [1952]. — P. GOMBÁS, E. MÁGORI, B. MOLNÁR u. É. SZABÓ, Acta Phys. Hung. 4, 267 [1954].

<sup>4</sup> P. GOMBÁS u. D. KISDI, Acta Phys. Hung. 17, 261 [1964].



an, wo  $r$  die gegenseitige Entfernung der beiden Neutronen und  $P_\sigma$  den Austauschoperator in bezug auf den Spin bedeutet. Für den ortsabhängigen Anteil  $J(r)$  setzen wir

$$J(r) = -\varepsilon_0 e^{-\beta^2 r^2}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_0 = 104,3 \text{ MeV}, \quad \beta = 0,7380 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-1}. \quad (5)$$

Hieraus ergibt sich für die mittlere Wechselwirkungsenergie zweier Neutronen mit den Impulsen  $p_1$  und  $p_2$ , wenn man die Mittelung über die Spins der Neutronen durchführt,

$$\varepsilon(p_1, p_2) = -\frac{\varepsilon_0 \pi^{3/2}}{2 \beta^3 \Omega} \exp \left[ -\frac{4 \pi^2 (p_1 - p_2)^2}{4 \beta^2 h^2} \right], \quad (6)$$

wo  $\Omega$  das Volumen des Neutronengases bezeichnet. Wenn man  $\varepsilon$  nach  $p_1$  und  $p_2$  im Inneren der Impulsraumkugel summiert, so erhält man die gesamte Wechselwirkungsenergie des Neutronengases. Hieraus folgt für die auf ein Neutron entfallende mittlere Wechselwirkungsenergie des Neutronengases

$$u_a = -3 \pi^2 \varepsilon_0 \frac{1}{x^3} f(x), \quad (7)$$

wo  $f(x)$  die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{6 \pi^{5/2}} [\pi^{1/2} x^3 \Phi(x) + (x^2 - 2) e^{-x^2} - (3 x^2 - 2)] \quad (8)$$

darstellt, in welcher  $\Phi(x)$  die GAUSSsche Transzendenten bedeutet und zur Abkürzung  $2 \pi p_\mu / \beta h = x$  gesetzt wurde.

Für die mittlere Gesamtenergie eines Neutrons hat man also

$$u = u_k + u_a = \frac{3}{5} \frac{\beta^2 h^2}{8 \pi^2 M} x^2 - 3 \pi^2 \varepsilon_0 \frac{1}{x^3} f(x). \quad (9)$$

Wenn man hier in  $x = 2 \pi p_\mu / \beta h$  die Größe  $p_\mu$  mit Hilfe von (1) durch  $\varrho$  ausdrückt, so erhält man  $u$  als Funktion von  $\varrho$ . Wie aus Abb. 1 zu sehen ist, steigt für das reine Neutronengas diese Funktion mit wachsendem  $\varrho$  monoton an, im Gegensatz zur Kernmaterie, wo  $u(\varrho)$  ein Minimum besitzt, das der stabilen Gleichgewichtslage entspricht.

Mit Hilfe von  $u(\varrho)$  lassen sich auch der Druck  $P$  und die Kompressibilität  $\alpha$  des Neutronengases sehr einfach als Funktionen von  $\varrho$  berechnen. Aus den

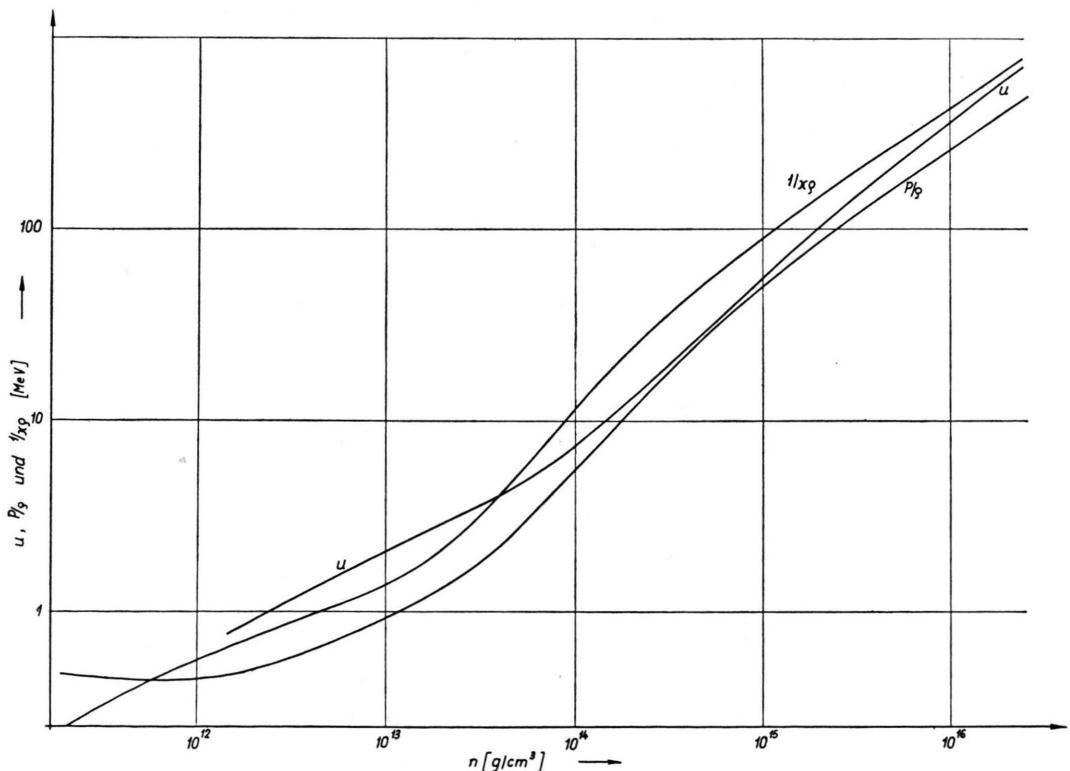


Abb. 1.  $u$ ,  $P/\rho$  und  $1/\alpha$  als Funktionen von  $n$ .

Definitionsgleichungen folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} P &= \varrho^2 \frac{d\varrho}{d\zeta} \\ &= \frac{\beta^5 h^2}{60 \pi^4 M} x^5 - \frac{\varepsilon_0 \beta^3}{6 \pi^{5/2}} [(x^2 + 2) e^{-x^2} + (x^2 - 2)], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta} &= \varrho \frac{dP}{d\varrho} \\ &= \frac{\beta^5 h^2}{36 \pi^4 M} x^5 - \frac{\varepsilon_0 \beta^3}{9 \pi^{5/2}} x^2 [1 - (x^2 + 1) e^{-x^2}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Sowohl  $P$  als auch  $1/\zeta \varrho$  sind für wachsende  $\varrho$  monoton ansteigende Funktionen von  $\varrho$ , die wir in Abb. 1 dargestellt haben, wobei wir statt der Neutronendichte  $\varrho$  die Massendichte  $n = M \varrho$  als unabhängige Variable einführen.

### Neutronenstern

In einem aus lauter Neutronen bestehenden Stern, einem sogenannten Neutronenstern, hält im Gleichgewichtszustand dem Druck des Neutronengases die Gravitation das Gleichgewicht. Den Gleichgewichtszustand kann man aus der Beziehung<sup>5</sup>

$$\frac{dP}{dr} = -GM^2 \frac{\left[ \varrho(r) + \frac{P(r)}{Mc^2} \right] \left[ N(r) + 4\pi r^3 \frac{P(r)}{Mc^2} \right]}{r \left[ r - \frac{2GM}{c^2} N(r) \right]} \quad (12)$$

berechnen, wo  $r$  die Entfernung vom Sternzentrum,  $G$  die Gravitationskonstante und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen,  $N(r)$  ist die Anzahl der Neutronen innerhalb der Kugel mit dem Radius  $r$ , es ist also

$$N(r) = \int_0^r \varrho(r) 4\pi r^2 dr. \quad (13)$$

Mit der Beziehung  $P = P(\varrho)$ , sowie der Definitionsgleichung von  $\zeta$  gelangt man zur Bestimmung von  $\varrho(r)$  und  $N(r)$  im Gleichgewichtszustand des Neutronensterns zu folgendem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dr} &= -GM^2 \varrho \zeta(\varrho) \left[ \varrho + \frac{P(\varrho)}{Mc^2} \right] \frac{\left[ N(r) + \frac{4\pi}{Mc^2} r^3 P(\varrho) \right]}{r \left[ r - \frac{2GM}{c^2} N(r) \right]} \\ \frac{dN}{dr} &= 4\pi r^2 \varrho, \end{aligned} \quad (14)$$

das mit den Anfangsbedingungen

$$\varrho(r=0) = \varrho_0, \quad N(r=0) = 0 \quad (15)$$

zu lösen ist. Die Lösung wurde von uns numerisch berechnet.

Im Besitz der Lösung können wir dann den durch die Beziehung  $\varrho(R) = 0$  definierten Sternradius  $R$ , sowie die beobachtbare Sternmasse  $m = M \cdot N(R)$  bestimmen und  $m$  sowie  $R$  als Funktionen der zentralen Neutronendichte  $\varrho_0$ , bzw. der zentralen Massendichte  $n_0 = M \varrho_0$  feststellen. Die Funktion  $m(n_0)$  ist in Abb. 2 dargestellt, die Massenverteilung für die Neutronendichte  $\varrho_0 = 2 \cdot 10^{39} \text{ cm}^{-3}$  ( $n_0 = 3,35 \cdot 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ ) zeigt Abb. 3.

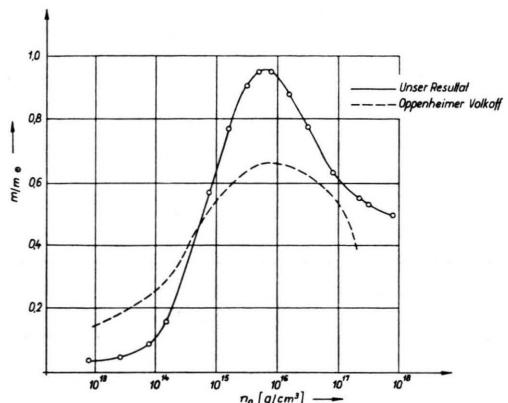


Abb. 2.  $m/m_\odot$  als Funktion von  $n_0$ .

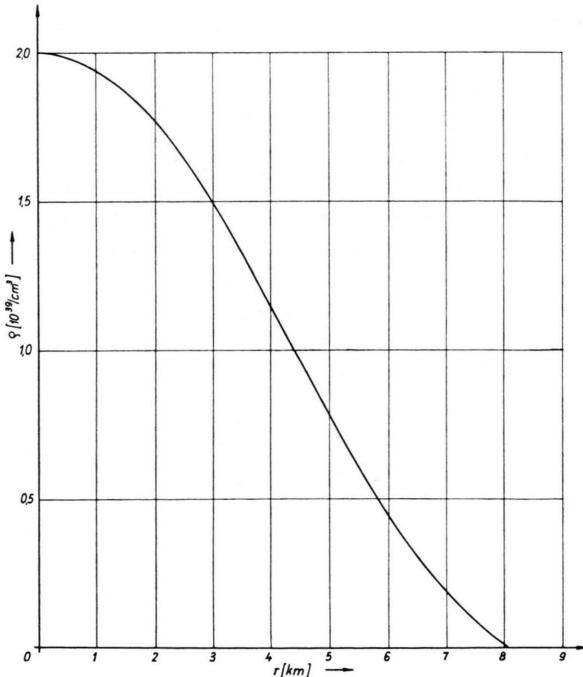


Abb. 3.  $\varrho$  als Funktion von  $r$  für den Fall  $\varrho_0 = 2 \cdot 10^{39} \text{ cm}^{-3}$ .

<sup>5</sup> J. R. OPPENHEIMER u. G. VOLKOFF, Phys. Rev. 55, 374 [1939].

Aus unserer in Abb. 2 dargestellten Funktion  $m(n_0)$  (ausgezogene Kurve) ist zu sehen, daß  $m(n_0)$  bei  $n_0 = 8,4 \cdot 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$  ein Maximum aufweist und nach Durchschreiten dieses Maximums mit wachsendem  $n_0$  ziemlich rasch abfällt. Es existiert also eine dem Maximum entsprechende kritische Masse  $m_c$ , oberhalb der ein Neutronenstern nicht existieren kann. Aus der von uns berechneten Kurve  $m(n_0)$  ergibt sich  $m_c = 0,96 m_\odot$ , wo wir, wie üblich, mit  $m_\odot$  die Sonnenmasse bezeichneten.

In Abb. 2 ist auch die von OPPENHEIMER und VOLKOFF<sup>5</sup> berechnete Funktion  $m(n_0)$  dargestellt, die diese Autoren mit der Annahme erhielten, daß zwischen den Neutronen keinerlei Wechselwirkung besteht. Der Verlauf der von OPPENHEIMER und VOLKOFF berechneten Funktion ist ähnlich wie der von uns berechneten Funktion; für die kritische Masse erhielten sie  $m_c = 0,66 m_\odot$ , also einen Wert, der in der Nähe des von uns berechneten Wertes liegt.

## Free-Bound Model of the Plasma in Equilibrium \*

G. ECKER and W. KRÖLL

Institut für Theoretische Physik der Universität Bochum \*\*

(Z. Naturforschg. 21 a, 2012—2022 [1966]; received 20 August 1966)

The plasma in thermodynamic equilibrium has been extensively discussed under the assumption that all particles can be classified as "bound" or "classically free". Under this assumption simple models led to divergencies of the partition functions of bound and free particles as well as to discrepancies of the predicted level shift. On the basis of a quantum-mechanical treatment we develop an "adapted free-bound approximation" for the eigenstates and a classical approximation for the partition function of the free particles. It is a decisive feature of the analysis that it takes free-bound interaction into account. The results produce values for the free-bound limit and the limit of the series continuum. They also remove the divergence difficulties.

### System

Subject of this investigation is a system of equal numbers of electrons and protons in thermodynamic equilibrium at a given temperature and volume below the critical density. Both, electrons and protons are represented by point charges interacting according to COULOMB's law. The formation of hydrogen atoms is taken into account but not the effects of negative ions or molecules. No external influences and boundary effects are considered.

The model of a hydrogen plasma has been chosen for the sake of formal simplicity. For other plasmas the problems are similar and our procedure is readily applied.

### The Problems

The analysis of the described system demands the solution of a quantum-mechanical many-body problem. To avoid the formidable difficulties of this solu-

tion simplifying models have been introduced. Shortcomings of these models led to the following problems:

*Divergence of the atomic partition function,  
Discrepancies in the calculated effect of level  
shift and broadening on the atomic partition  
function,*

*Divergencies of the classical partition function  
of free electrons and protons.*

### Previous Results

*Divergence of the atomic partition function.* Attempts to limit the hydrogen partition function have been based on very different models and date back as early as 1916.

It has been argued that eigenstates with an extension larger than the plasma volume cannot exist<sup>1</sup>. A much stronger limitation was introduced by the omission of eigenstates extending beyond the next

\* Part of this work was carried out during our stay at the Joint Institute for Laboratory Astrophysics in Boulder, Colorado.

\*\* Present address: 53 Bonn, Wegelerstr. 10.

<sup>1</sup> M. PLANCK, Ann. Phys. 75, 637 [1924].